Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет
имени Н.И. Вавилова»

МАТЕМАТИКА

Краткий курс лекций

для студентов 1 курса

Направление подготовки
35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции

Профиль подготовки

Технологии пищевых производств в АПК

Саратов 2018

УДК 51
ББК 22
К77

Рецензенты:
Доцент кафедры «Прикладная математика» ФГОУ ВПО «Саратовский Государственный Технический Университет»
А.А. Мочалин.
Зав. кафедры «Математика, математическое моделирование» ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ»
Г.Н. Камышова

Математика: краткий курс лекций для студентов 1 курса специальности (направления подготовки) 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции» / Сост.: Т.В. Кириллова// ФГОУ ВО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2018. – 94 с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Математика» составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции». Краткий курс содержит теоретический материал по основным вопросам высшей математики. Направлен на формирование у студентов знаний об основных понятиях и законах математики, на применение этих знаний для решения профессиональных задач.

Введение.

Математика – одна из важнейших естественнонаучных дисциплин. Высшая математика имеет исключительно важное значение как для всего процесса обучения студента, так и для последующей профессиональной деятельности специалиста.

Краткий курс лекций по дисциплине «Математика» предназначен для студентов по направлению подготовки 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции». Он позволяет студентам освоить основные математические методы, необходимые для анализа процессов и явлений в ходе поиска оптимальных решений практических задач, обучает методам обработки и анализа результатов эксперимента. Курс нацелен на формирование ключевых компетенций, необходимых для эффективного решения профессиональных задач и организации профессиональной деятельности.

Лекция 1

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ. МАТРИЦЫ

1.1. Понятие определителей

Определителем второго порядка называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обозначается символом

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Определителем третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

1.2. Свойства определителей

1. При перестановке 2-х строк или столбцов определитель изменит знак на противоположный, т.е., например,

2.Если все элементы какой–либо строки или столбца определителя равны нулю, то сам определитель равен нулю.

3.Если к какой–либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и тоже число, то определитель не изменит своей величины. Например,

1.3. Алгебраические дополнения и миноры

Пусть имеем определитель третьего порядка.

Минором, соответствующим данному элементу a_{ij} определителя третьего порядка, называется определитель второго порядка, полученный из данного вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент, т.е. i-ой строки и j-го столбца. Миноры соответствующие данному элементу a_{ij} будем обозначать M_{ij}.

Например, минором M_{12}, соответствующим элементу a_{12}, будет определитель $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, который получается вычёркиванием из данного определителя 1-ой строки и 2-го столбца.

Таким образом, формула, определяющая определитель третьего порядка, показывает, что этот определитель равен сумме произведений элементов 1-ой строки на соответствующие им миноры; при этом минор, соответствующий элементу a_{12}, берётся со знаком “–”, т.е. можно записать, что

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

.

Аналогично можно ввести определения миноров для определителей второго порядка и высших порядков.

Введём ещё одно понятие.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}.

Из определения получаем, что связь между алгебраическим дополнением элемента и его минором выражается равенством $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Теорема (о разложении определителя по заданной строке или столбцу). Определитель равен сумме произведений элементов какой–либо его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Всё вышесказанное справедливо и для определителей любого более высокого порядка.

1.4. Определение матрицы. Виды матриц.

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки.

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

1.5. Действия над матрицами

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$.

транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T.

Связь между матрицей A и её транспонированной можно записать в виде. $a_{ij}^T = a_{ji}$ ***Сложение матриц.*** Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы A и B нужно к элементам матрицы A прибавить элементы матрицы B, стоящие на тех же местах.

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы.

Если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times p$, то получим матрицу C размера $m \times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

9

Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц. Если A – квадратная матрица, то ***обратной*** для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. (Это определение вводится по аналогии с умножением чисел) Справедлива следующая теорема:

Теорема. Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A')^T.$$

Вопросы для самоконтроля

Вопросы для самоконтроля

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения.
3. Методы вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
1. Матрицы. Квадратная, прямоугольная, единичная матрицы.
2. Сложение, вычитание, умножение матрицы на число.
3. Произведение матриц. Условие, при котором возможно умножение матриц.
4. Обратная матрица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра в примерах и задачах. Практикум: компьютерное моделирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010586-4 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895 – Загл. с экрана.

2. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010206-1, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=476097 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика: учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Элементы линейной алгебры. Типовой расчёт 1.Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с.

5. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Типовой расчёт 2. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

6. Математика. Сборник задач. Часть 1. Модули 1, 2, 3. Составители: Корсунов В. П. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008

Лекция 2

Системы линейных алгебраических уравнений.

2.1. Основные понятия

Системой m линейных уравнений с n неизвестными **называется система вида**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} и b_i (i=1,…,m; b=1,…,n) – некоторые известные числа, а $x_1,\ldots,x_n$ – неизвестные. В обозначении коэффициентов a_{ij} первый индекс iобозначает номер уравнения, а второй j – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

2.2. Матричный метод решения систем

Матрицы дают возможность кратко записать систему линейных уравнений. Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и матрицы столбцы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix},$$

т.е. в результате произведения мы получаем левые части уравнений данной системы. Тогда пользуясь определением равенства матриц данную систему можно записать в виде $A{\cdot}X=B$.

Здесь матрицы A и B известны, а матрица X неизвестна. Её и нужно найти, т.к. её элементы являются решением данной системы. Это уравнение называют ***матричным уравнением***.

Пусть определитель матрицы отличен от нуля $|A| \neq 0$. Тогда матричное уравнение решается следующим образом. Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице А:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \text{ или } (A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Поскольку $A^{-1}A = E$ и $E{\cdot}X = X$, то получаем решение матричного уравнения в виде $X = A^{-1}B$.

2.3. Метод Крамера

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными. Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

2.4. Метод Гаусса

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым.

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым.

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

При использовании метода Гаусса уравнения при необходимости можно менять местами.Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

К ***элементарным преобразованиям*** матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

Вопросы для самоконтроля

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра в примерах и задачах. Практикум: компьютерное моделирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010586-4 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895 – Загл. с экрана.

2. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010206-1, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=476097 – Загл. с экрана.

3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Элементы линейной алгебры. Типовой расчёт 1.Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с.

5. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Типовой расчёт 2. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

6. Математика. Сборник задач. Часть 1. Модули 1, 2, 3. Составители: Корсунов В. П. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008

Лекция 3

ВЕКТОРЫ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ, СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ.

3.1. Основные понятия

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

3.2. Базис в пространстве и на плоскости

Определение.1) ***Базисом*** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)***Базисом*** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \qquad y = (y_1 + y_2)/2; \qquad z = (z_1 + z_2)/2.$$

3.3. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением **векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

3.4. Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.5. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3.6. Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

3.7. Различные виды уравнения прямой

Общее уравнение прямой.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка Ax + By + C = 0, причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется угловым коэффициентом прямой.

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; *т.е.* $y = kx + b$, то полученное уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С ≠ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Нормальное уравнение прямой. Если обе части уравнения Ах + Ву + С = 0 разделить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется нормирующем множителем, то получим xcosφ + ysinφ - p = 0 –нормальное уравнение прямой.

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы μ⋅С < 0.

р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

3.8. Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

3. 9. Расстояние от точки до прямой.

Теорема. Если задана точка M(x_0, y_0), то расстояние до прямой Ах + Ву + С =0 определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Линейные операции над векторами
2. Скалярное произведение
3. Векторное произведение
4. Смешанное произведение
5. Прямоугольная и полярная системы координат на плоскости. 2.Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.
6. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
7. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра в примерах и задачах. Практикум: компьютерное моделирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010586-4 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895 – Загл. с экрана.
2. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010206-1, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=476097 – Загл. с экрана.
3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.
4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.
5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Элементы линейной алгебры. Типовой расчёт 1.Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с.

5. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Типовой расчёт 2. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

Лекция 4

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ

4.1. Уравнение кривой на плоскости.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
4) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
5) $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

В окружности $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ центр имеет координаты (a; b).

4.2. Эллипс

Определение. Эллипсом называется линия, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Определение. Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.

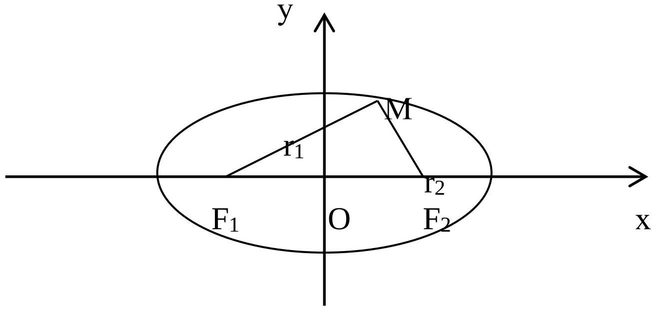

Рисунок 1. Эллипс

F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Теорема. *Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$
$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется ***эксцентриситетом***.

$$e = c/a.$$

Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

4.3. Гипербола.

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.

Выберем на гиперболе произвольную точку M(x, y). Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Определение. Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется ***эксцентриси***тетом гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, *a* – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

4.4. Парабола

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.

Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2;

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Вопросы для самоконтроля

1. Каноническое уравнение эллипса
2. Каноническое уравнение гиперболы
3. Каноническое уравнение параболы
4. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.
6. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра в примерах и задачах. Практикум: компьютерное моделирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010586-4 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895 – Загл. с экрана.
2. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010206-1, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=476097 – Загл. с экрана.
3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.
4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.
5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2. **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3. **Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Элементы линейной алгебры. Типовой расчёт 1.Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с.

5. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Типовой расчёт 2. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

6. Математика. Сборник задач. Часть 1. Модули 1, 2, 3. Составители: Корсунов В. П. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008

Лекция 5

ПЛОСКОСТЬ ОБЩЕЕ И НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Различные виды уравнения плоскости

Общее уравнение плоскости.

Определение. Плоскостью называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C – координаты вектора $\overrightarrow{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор нормали к плоскости.

Возможны следующие частные случаи:

A = 0 – плоскость параллельна оси Ox

B = 0 – плоскость параллельна оси Oy

C = 0 – плоскость параллельна оси Oz

D = 0 – плоскость проходит через начало координат

A = B = 0 – плоскость параллельна плоскости xOy

A = C = 0 – плоскость параллельна плоскости xOz

B = C = 0 – плоскость параллельна плоскости yOz

A = D = 0 – плоскость проходит через ось Ox

B = D = 0 – плоскость проходит через ось Oy

C = D = 0 – плоскость проходит через ось Oz

A = B = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOy

A = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOz

B = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью yOz

***Уравнение плоскости, проходящей через три точки*.**

Для того, чтобы через три какие- либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка M(x, y, z) лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Теорема. Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}$ (A, B, C) имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Уравнение плоскости в отрезках.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z.

5.2. Угол между плоскостями

Угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей.

$$\cos\varphi_1=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \,||\, \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

5.3. Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.4. Различные виды уравнения прямой

Параметрическое уравнение прямой.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$. Обозначим радиус- векторы этих точек как $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}$t, где t – некоторый параметр.

Итак, можно записать: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}$t.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – параметрическое уравнение прямой.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Канонические уравнения прямой

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Общие уравнения прямой.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Пусть в пространстве заданы две плоскости, нормальные векторы которых $\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2); $\vec{r}$ (x, y, z).

Тогда общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

5.5. Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

l_1: $\vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$

l_2: $\vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$

$\vec{r} = (x, y, z);\quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1);\quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2);\quad \overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1);\quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

.

5.6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Вопросы для самоконтроля

1. Различные виды уравнения плоскости в пространстве.
2. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
3. Расстояние от точки до плоскости.
4. Различные виды уравнения прямой в пространстве.
5. Как определяется угол между прямыми в пространстве?

6. При каких условиях прямые в пространстве параллельны?
7. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых в пространстве

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра в примерах и задачах. Практикум: компьютерное моделирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010586-4 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895 – Загл. с экрана.
2. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010206-1, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=476097 – Загл. с экрана.
3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.
4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.
5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Элементы линейной алгебры. Типовой расчёт 1.Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с.

5. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Типовой расчёт 2. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

6. Математика. Сборник задач. Часть 1. Модули 1, 2, 3. Составители: Корсунов В. П. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008

Лекция 6

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

6.1. Понятие функции одной переменной

Определение. Если каждому значению x числового множества X по правилу f соответствует единственное число множества Y, то говорят, что на числовом множестве X задана функция y = f(x), x $\in$X.
В этом случае x называется аргументом, y - значением функции. Множество X называется областью определения функции, Y - множеством значений функции.
Часто задают это правило формулой; например, y = 2x + 5 или $y = \frac{x^2+7}{2x-7}$. Указанный способ задания функции при помощи формулы называется аналитическим.
Определение Графиком функции y — f(x) называется множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют соотношению y = f(x).

6.2. Четность и нечетность функций

Определение. Функция y = f(x) называется четной, если она обладает следующими двумя свойствами:
1) область определения этой функции симметрична относительно начала координат O;
2) для любого значения x, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство f(-x) = f(x).
Определение. Функция y = f(x) называется нечетной, если:
1) область определения этой функции симметрична относительно точки O;
2) для любого значения x, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство f(-x) = -f(x).
График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат O(0; 0). Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией общего вида.
Определение. Функция y = f(x) называется периодической, если существует такое число T > 0, что для каждого значения x из области определения этой функции x + T и x - T также принадлежат области определения и выполняется равенство f(x + T) = f(x). Число T называется периодом функции. Очевидно, что f(x + nT) = f(x), где n $\in$Z.

6.3. Основные элементарные функции

***Основные элементарные функции*:** Прямая пропорциональность. Линейная функция**.** Обратная пропорциональность. Гипербола. Квадратичная функция**.** Квадратная парабола. Степенная функция. Показательная функция. Логарифмическая функция**.** Тригонометрические функции.Обратные тригонометрические функции.

Пропорциональные величины. Если переменные y и x ***прямо пропорциональны***, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением: $y = kx$

где k - постоянная величина (*коэффициент пропорциональности*).

6.4. Числовые последовательности. Их свойства

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность** $x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}$

Общий элемент последовательности является функцией от n.$x_n = f(n)$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство: $|x_n| < M$ т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

6.5. Предел последовательности

Определение. Число **a** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного ε>0 существует такой номер N, что для всех n > N выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$**сходится** к а при $n \to \infty$.

Свойство: Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

6.6. Монотонные последовательности

Определение. 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.

2)Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.

3)Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.

4)Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются ***монотонными.*** Возрастающие и убывающие последовательности называются ***строго монотонными***.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

6.7. . Число е

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

6. 8. Предел функции в точке.

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется пределом функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:
Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции f(x) в точке x = a слева, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции f(x) в точке x = a справа.

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также односторонними пределами функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что А – конечный предел функции f(x).

6. 9. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число А называется пределом функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.
Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A.$

6.10. Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

6. 11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение. Функция f(x) называется бесконечно малой при $x \to a$, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Определение. Функция f(x) называется бесконечно большой при $x \to a$, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

6.12. Непрерывность функции в точке.

Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется ***непрерывной в точке*** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

6.13. Точки разрыва и их классификация.

Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней.

Если односторонний предел $\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.

Если односторонний предел $\lim_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 1- го рода, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы. $\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют устранимой точкой разрыва.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 2 – го рода, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример. Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$.

Вопросы для самоконтроля

1. Область определения, область изменения. Способы задания функции действительного аргумента.

2. График числовой функции. Основные характеристики: четные, нечетные, монотонные, периодические функции. Обратная функция.
3. Сложная функция. Основные элементарные функции и их графики. Преобразования графиков.

4. Понятие о числовых последовательностях. Последовательности как функции на множестве натуральных чисел. Способы задания.
5. Основные характеристики: монотонность, ограниченность. Предел последовательности: определение, геометрический смысл
6. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
7. Свойства бесконечно малых последовательностей. Операции над пределами последовательностей. Пределы и неравенства
8. Число е как предел последовательности. Экономический смысл числа е и показательной функции, связь с формулой вычисления сложных процентов.
6. Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
7. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией. Теоремы о пределах. Признаки существования пределов.
8. Эквивалентные бесконечно малые функции. Приближенные вычисления
9. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции в интервале и на отрезке. Точки разрыва и их классификации.
10. Основные теоремы о непрерывных функциях (сумма, разность, произведение, частное). Непрерывность элементарных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.
2. **Шипачев, В. С.** Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.
3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.
4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.
5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Типовой расчёт 3. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 24 с.

Лекция 7

ПРОИЗВОДНЫЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ.

7.1. Понятие производной

Определение. Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке $(x_0, f(x_0))$.
Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

7.2. Основные правила дифференцирования.

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

7.3. Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;	9) $(\sin x)' = \cos x$

2)$(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

7.4. Производная сложной функции.

Теорема. Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

7.5. Понятие дифференциала функции.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$. Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

7.6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим вторую производную функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие производной функции, ее геометрический и механический смысл.
2. Правила дифференцирования и таблица производных. Производная сложной функции.
3. Логарифмическая производная и производная показательно- степенной функции.
4. Понятие дифференциала функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям. Примеры.
5. Производные и дифференциалы высших порядков. Примеры вычисления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Типовой расчёт 3. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 24 с.

Лекция 8

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

8.1. Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е.* $f'(x) \geq 0$.

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем* $f'(x) > 0$ *для* $a < x < b$*, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

8.2. Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке* $x = x_1$ *и точка* x_1 *является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

8.3. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.

Теорема. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

8.4. Асимптоты графика функции.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты х точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Вопросы для самоконтроля

1. Условия монотонности функции. Экстремумы функции.
2. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.
3. Асимптоты функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
4. Общая схема исследования функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и

К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Типовой расчёт 3. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 24 с.

Лекция 9

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

9.1. Понятие функции нескольких переменных. Предел функции в точке

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

***Определение*:** Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Определение*: *Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение: Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Определение: Число A называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие $MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

9.2. Непрерывность функции нескольких переменных

***Определение*:** Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется ***точкой разрыва*** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и

ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство$f(x_0, y_0, \ldots) \geq f(x, y, \ldots)$ а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \leq f(x, y, \ldots)$
тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – ***наибольшее значение*** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – ***наименьшее значение*** функции $f(x, y, \ldots)$ в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Вопросы для самоконтроля

1. Область определения. Способы задания. Линия и поверхности уровня.
2. Предел и непрерывность функции двух переменных.
3. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа:
http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Типовой расчёт 3. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 24 с.

Лекция 10

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10.1. Производная функции нескольких переменных

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

10.2. Полное приращение и полный дифференциал

Определение. Для функции f(x, y) выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением**.

Определение. Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется ***полным приращением*** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Определение: Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

10.3. Частные производные высших порядков.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные ***частными производными первого порядка.***

Производные этих функций будут ***частными производными второго порядка.***

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются ***смешанными производными.***

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)$$

…………………

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

10.4. Производная по направлению. Градиент.

Определение: Предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется ***производной функции u(x, y, z) по направлению вектора*** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).,

где $\frac{\partial u}{\partial s} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

Определение: Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям производной функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Градиент связан с производной по направлению.

.

Вопросы для самоконтроля

1. Частные производные и их геометрическое истолкование.
2. Частные производные высших порядков..
3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции.
4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
5. Дифференциалы высших порядков. Производная сложной функции.
6. Производная по направлению. Градиент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Типовой расчёт 3. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 24 с.

Лекция 11

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

11.1. Необходимое и достаточное условия экстремума

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$f(x_0, y_0) > f(x, y)$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.
2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

11.2. Условный экстремум

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение

φ(x, y) = 0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение u = f(x, y) + λφ(x, y) называется ***функцией Лагранжа.***

Вопросы для самоконтроля

1. Необходимые и достаточные условия экстремума.
2. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области. Условный экстремум. Метод Лагранжа.
3. Метод наименьших квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Типовой расчёт 3. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 24 с.

Лекция 12

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

12.1. Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

12.2. Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

12.3. Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на применении формулы интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$;

Вопросы для самоконтроля

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл, его геометрический смысл.
2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Таблица интегралов некоторых функций.
4. Метод подстановки (замены переменной) в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Интегральное исчисление функции одной переменной. Типовой расчет №4. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

Лекция 13

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

13.1. Понятие определенного интеграла.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b] .

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками:$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots\ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется интегральной суммой для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

***Определение*:** Если при любых разбиениях отрезка [a, b] и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b]. Обозначение : $\int_a^b f(x)dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

13.2. Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

.

***Теорема*:** (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

13.3. Замена переменной.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

13.4. Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

13.5. Несобственный интеграл с бесконечными пределами

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

***Определение*:** Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции f(x) на интервале [a, ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

13.6. Признаки сходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ тоже сходится и $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx \ge \int_{a}^{\infty} f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_{a}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

13.7. Интеграл от разрывной функции.

Если в точке x = c функция либо неопределена, либо разрывна, то

$$\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_{a}^{c} f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ не существует, то $\int_{a}^{c} f(x)dx$ - расходится.

Если в точке x = a функция терпит разрыв, то $\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{b\to a+0}\int_{b}^{c} f(x)dx$.

Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.
Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие определённого интеграла и его геометрический смысл.
2. Свойства определённого интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
5. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования.
6. Что означает сходимость интеграла?
7. Интеграл от разрывной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Интегральное исчисление функции одной переменной. Типовой расчет №4. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

Лекция 14

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

14.1. Вычисление площадей плоских фигур.

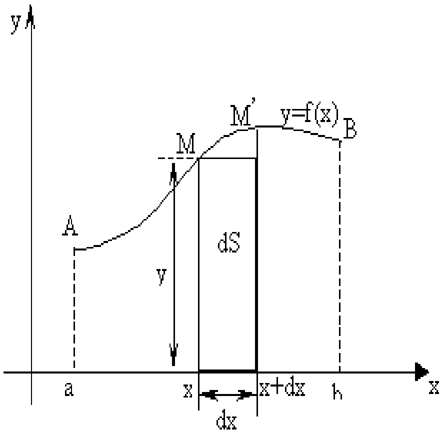

Рисунок 2. Криволинейная трапеция

Наиболее простая геометрическая задача: найти площадь фигуры, границы которой определены уравнениями соответствующих линий и осью OX . В этом случае рассматривается криволинейная трапеция, о которой говорилось выше (рис. 2.) и используется геометрический смысл определенного интеграла как предел суммы площадей маленьких прямоугольников, образующих ступенчатую фигуру. Элементом площади в прямоугольной декартовой системе координат, полученным в процессе построения интегральной суммы, в этом случае служит прямоугольник площадь которого $\Delta S_i = f(\zeta_i)\Delta x_i$,

Тогда площадь криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = \lim \sum_{i=1}^{i=n} \Delta S_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

где S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, отрезком [a,b] на оси Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$,($a<b$).

Если функция принимает отрицательные значения на промежутке интегрирования, или принимает значения разных знаков , то площадь находится как сумма модулей значений интегралов вычисленных по промежуткам на которых функция знакопостоянна –положительная или отрицательная.

14.2. Вычисление длины дуги кривой.

Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y= f(x)$, где $f(x)$ непрерывная на отрезке [a, b] функция (рис. 3.). Для нахождения длины кривой разобьем ее на n маленьких кусочков ΔL_i дуги. При большом числе разбиения дугу ΔL_i можно спрямить кусочком прямой (хорды) близкой по размеру.

i

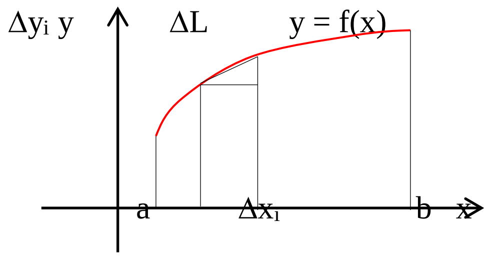

Рисунок 3. Плоская кривая

Тогда кривую AB можно заменить ломанной кривой, построенной из прямых кусочков ΔL_i.и вписанной в эту кривую.

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$. Тогда длина дуги равна $L = \lim\limits_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Из геометрических соображений:

Тогда можно показать, что

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

14.3. Вычисление объемов тел вращения

Рассмотрим кривую, заданную уравнением *y = f(x)*. Предположим, что функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси *Ox*, то получим так называемое **тело вращения** (рис. 4.).

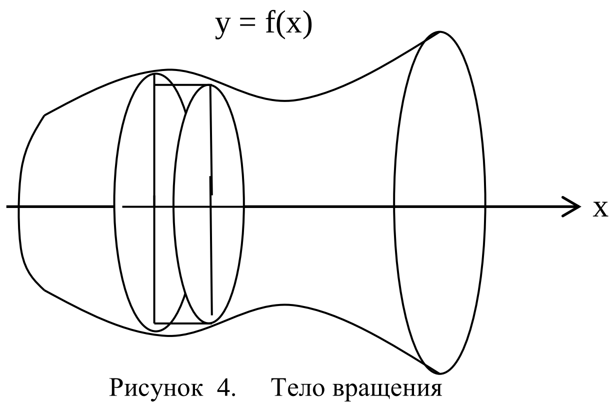

Рисунок 4. Тело вращения

Для построения интегральной суммы проведем разбиение отрезка [*a,* b] на кусочки Δx_i и через концы образовавшихся отрезков проведем плоскости перпендикулярно оси .

Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x=\xi_i$ = const представляет собой круг радиуса $R=\left|f(\xi_i)\right|$ и его можно рассматривать как основание цилиндра высотой Δx_i, то объем тела вращения может быть легко найден как предел суммы объемов цилиндров по полученной выше формуле:

$$V=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi f(\xi_i)^2\Delta x_i=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Вопросы для самоконтроля

1. Вычисление площади плоской фигуры.
2. Площадь криволинейного сектора.
3. Длина дуги гладкой кривой.
4. Вычисление объема тела по площади параллельных сечений.
5. Объем тела вращения.
6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Интегральное исчисление функции одной переменной. Типовой расчет №4. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

Лекция 15

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

15.1. Общие понятия

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

15.2. Теорема Коши

Теорема Коши это теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Определение. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной C.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

15.3. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

После преобразований получим

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

15.4. Однородные уравнения.

Определение. Функция f(x, y) называется однородной n – го измерения относительно своих аргументов х и у, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется однородным, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

15.5. Линейные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x) \neq 0$) применяют метод Бернулли.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)uv=Q(x)$$
$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$$

15.6. Уравнение Бернулли

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y'+Py=Q\cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Уравнения Бернулли решаются тем же методом, что и линейные уравнения.

Вопросы для самоконтроля

1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия: порядок уравнения, решение, общее и частное решения
2. Дифференциальные уравнения 1 го порядка. Теорема Коши и следствия из неёДифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения.
4. Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли.
5. Уравнения в полных дифференциалах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Интегральное исчисление функции одной переменной. Типовой расчет №4. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

Лекция 16

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

16.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$.

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ *называется* ***характеристическим многочленом*** *дифференциального уравнения.*

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется характеристическим уравнением.

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad ... \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad ... \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad ...x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

16.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$f(x) = P(x)e^{\alpha x}$,

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_m$ - многочлен степени m.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

Вопросы для самоконтроля

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2го порядка с постоянными коэффициентами
2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2 го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Нахождение частного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

2. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

3. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. -

352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

4. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

5. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3**. Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

4. Интегральное исчисление функции одной переменной. Типовой расчет №4. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

Лекция 17

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

17.1. Основные понятия

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

17.2. Классическое определение вероятности

Исходя из общих понятий можно дать определение вероятности.

Определение. Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$0 \le P(A) \le 1$

Определение. Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное.

Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру, при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L.

Вопросы для самоконтроля

1. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Примеры.
2. Случайные события и их классификация
3. Относительная частота случайного события и статистическое определение вероятности
4. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчёт вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бирюкова, Л. Г.** Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Матвеев, Р. В. Сагитов, Е. В. Швед., - 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899 – Загл. с экрана.

2. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

4. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3. **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011748-5. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521 – Загл. с экрана.

3. **Сапожников, П. Н.** Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=548242 – Загл. с экрана.

Лекция 18

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

18.1. Операции над событиями.

Определение. События A и B называются равными, если осуществление события A влечет за собой осуществление события B и наоборот.

Определение. Объединением или суммой событий A_k называется событие A, которое означает появление хотя бы одного из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение. Пересечением или произведением событий A_k называется событие A, которое заключается в осуществлении всех событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

18.2. Основные теоремы о вероятности

Теорема (сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1: Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Определение. Событие A называется независимым от события B, вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется зависимым от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Определение. Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A, называется условной вероятностью события B.

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

Теорема. (Умножения вероятностей) Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности *одного из них* на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1q_2...q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

18.3. Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Формулы Бейеса. (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}; \quad (i=1,2\ldots n)$$

Эти формулы называются формулами Бейеса.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие суммы и произведения событий
2. Несовместные события. Теорема сложения вероятностей несовместных событий и следствия из неё.
3. Совместные события. Теорема сложения вероятностей совместных событий
4. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий
5. Зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
6. Формула полной вероятности, формулы Бейеса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бирюкова, Л. Г.** Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Матвеев, Р. В. Сагитов, Е. В. Швед., - 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899 – Загл. с экрана.

2. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

4. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1 **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

4. **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е.

А. Криштапович. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011748-5. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521 – Загл. с экрана.

5. **Сапожников, П. Н.** Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60х90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=548242 – Загл. с экрана.

Лекция 19

ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

19.1. Формула Бернулли.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события А**.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m(1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем формулу Бернулли:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

19.2. Локальная формула Лапласа

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю, для вычисления биномиальных вероятностей используют теоремы Лапласа.

Теорема. Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближённой формуле.

$$Pn(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

Равенство тем точнее, чем больше n

19.3. Интегральная формула Лапласа

Теорема. Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$ может быть найдена по приближённой формуле.

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

19.4. Формула Пуассона

Теорема. Если число испытаний неограниченно увеличивается $(n \to \infty)$ и вероятность наступления события A в каждом испытании неограниченно уменьшается $(p \to 0)$, но так, что их произведение $np = a$ является постоянной величиной, то вероятность $P_n(m)$ приближённо равна $P_n(m)$

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли
2. Локальная и интегральная формулы Лапласа
3. Формула Пуассона, условия её применения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бирюкова, Л. Г.** Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Матвеев, Р. В. Сагитов, Е. В. Швед., - 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899 – Загл. с экрана.

2. Кальней, С. Г. Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60х90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

4. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1. **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2**. Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3. **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011748-5. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521 – Загл. с экрана.

4. **Сапожников, П. Н.** Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=548242 – Загл. с экрана.

Лекция 20

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

20.1. Основные понятия

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

20.2. Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется рядом распределения.

Графическое представление этой таблицы называется многоугольником распределения. При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

Определение. Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют интегральной функцией.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Свойства функции распределения.

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$0 \le F(x) \le 1$

2) F(x) – неубывающая функция.

$F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале.

$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

.

20.3. Закон распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина так же как и дискретная может задаваться функцией распределения.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

.**Теорема.** Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства плотности распределения.

1) Плотность распределения – неотрицательная функция.

$f(x) \geq 0$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ∞ до ∞ равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

20.4. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$M(C) = C$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$M(Cx) = CM(x)$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$M(XY) = M(X)M(Y)$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$M(X+Y) + M(X) + M(Y)$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Однако, математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

Определение. Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Определение. Модой M_o называется наиболее вероятное значение дискретной случайной величины.

20.5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *f(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a,b]$.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

Определение. Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум.

$$f(M_0)=\max.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие случайной величины, закон её распределения
2. Дискретная случайная величина. Ряд распределения, многоугольник разделения
3. Функция распределения F(x) и её свойства
4. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения вероятности f(x) и её свойства. Кривая распределения.
5. Числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение)
6. Свойства математического ожидания и дисперсии
7. Биномиальное распределение дискретной случайной величины, его числовые характеристики
8. Равномерное распределение непрерывной случайной величины, его числовые характеристики
9. Нормальное распределение непрерывной случайной величины, определение, вид кривой Гаусса, свойства кривой.
10. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Правило 3-х сигм

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бирюкова, Л. Г.** Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Матвеев, Р. В. Сагитов, Е. В. Швед., - 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899 – Загл. с экрана.

2. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. -

352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

4. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1. **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

2. **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

3. **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011748-5. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521 – Загл. с экрана.

4. **Сапожников, П. Н.** Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=548242 – Загл. с экрана.

Лекция 21

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ВЫБОРКЕ. ЭЛЕМЕНТЫ РЕГРЕССИОННОГО И КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

21.1. Основные понятия и определения статистики.

Математическая статистика – это наука занимающаяся методами сбора опытных данных и обработки их методами теории вероятностей.

Исходными понятиями математической статистики являются понятия генеральной совокупности и выборочной совокупности, некоторых однородных объектов, по определенному признаку.

Генеральной совокупностью данных однородных объектов по некоторому их признаку, называется вся мыслимая совокупность этих объектов, а выборочная совокупность - есть совокупность случайно отобранных объектов из соответствующей генеральной совокупности.

Естественно, получение выборочной совокупности из своей генеральной, является многовариантным, причем каждая вариантность должна быть «представительной» выборкой, т. е. она должна верно представлять свою генеральную совокупность. Для этого ее значения должны быть выбраны не из какого-то одного места генеральной совокупности, а из разных частей ее объема, при этом объем совокупности – число объектов этой совокупности.

Аналогично тому, как в теории вероятностей, мы имеем дело с распределением случайной величины в виде перечневой таблицы, в математической статистике мы будем иметь дело с распределением выборочной совокупности в виде так называемого вариационного (статистического) ряда (дискретного или интервального). Свое название «вариационный» он получил от слова «варианта».

Характерной способностью вариационных рядов (в отличие от перечневой таблицы), является тот факт, что в них вероятности заменены частотами (ведь теперь вероятности неизвестны).

Определение. Вариационный ряд – это таблица, в верхней строке которой указаны выборочные данные, а в нижней – частоты или относительные частоты с которыми каждое из выборочных данных наблюдалось.

При очень большом объеме выборки (n - большое) дискретный вариационный ряд становится слишком громоздким и мало наглядным. Поэтому прибегают к интервальному вариационному ряду. Он получается из дискретного так: находят разность между наибольшим и наименьшим выборочным значением варианты и делят эту разность на К – желаемое число интервалов ΔX_i, следовательно,

$$\Delta X_i = \frac{X_{max} - X_{min}}{K}$$

21.2. Графическое изображение вариационных рядов

В целях наглядности строят различные графики вариационного ряда. Мы остановимся на графическом изображении вариационного ряда в виде полигона, в виде гистограммы.

Полигон, как правило, служит для изображения дискретного вариационного ряда. Для его построения в прямоугольной системе координат наносят точки с координатами (x_i;m_i) или (x_i;w_i). Затем эти точки соединяют последовательно отрезками. Полученная ломаная линия называется полигоном.

Гистограмма служит для изображения только интервального вариационного ряда. Для её построения в прямоугольной системе координат по абсцисс откладывают отрезки ΔX_i - интервалы соответствующей интервальной таблицы и на этих отрезках, как на основаниях, строят прямоугольники с высотой $h = W_i/\Delta X_i$. В итоге оказывается, что площадь каждого такого прямоугольника численно равна W_i , а площадь всех прямоугольников, составляющих гистограмму, равна $\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$.

21.3. Числовые характеристики выборки

Построение вариационных рядов – есть только первый шаг к осмыслению результатов наблюдений. Следующим шагом я является нахождение коэффициента вариации т.д. Условились для генеральной совокупности её числовые характеристики (кстати, всегда неизвестные) обозначать теми же символами, что и характеристики случайной величины в теории вероятностей. А для числовых характеристик выборок ввели следующие аналоги

Таблица 21.1. Числовые характеристики генеральной и выборочной совокупностей

Для генеральной совокупности	Для выборочной совокупности
m_x – математическое ожидание, его аналог	$\bar{X} = \frac{\sum x_i m_i}{n}$, где $n = \sum m_i$
σ^2- дисперсия, её аналог	$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 m_i}{n} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ где $\overline{x^2} = \bar{X} = \frac{\sum x_i{}^2 m_i}{n}$
σ – среднее квадратическое отклонение, его аналог	$S = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$

21.4. Оценки параметров генеральной совокупности

Мы уже знаем, что на практике чаще других распределений встречаются распределения нормальные, т.е. такие, когда дифференциальная функция

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Здесь параметры a ; σ^2; σ имеют смысл соответственно: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения.

Пусть есть основания предполагать, что нкоторая генеральная совокупность имеет нормальное распределение. Чтобы его выразить конкретной функцией f(x), надо найти значения параметров: a ; σ^2; σ. Обычно в распоряжении исследователя имеется не сама генеральная совокупность, а лишь часть её – выборочная совокупность. Очевидно, что числовые характеристики найденной для выборочной совокупности, являются лишь приближенными значениями соответствующих параметров генеральной совокупности. Эти приближенные значения назвали оценками параметров генеральной совокупности.

Оценки бывают точечные и интервальные. Точечные применяются при выборках большого объема, а при выборках малого объема – точечные оценки приводят к значительным ошибкам, и потому рекомендуются интервальные оценки. Рассмотрим эти оценки.

Точечные оценки. Оценка называется точечной, если она задана одним числом.

Пусть Θ некоторый искомый параметр генеральной совокупности (это может быть α; σ^2 или σ), а $\tilde{\Theta}$ его оценка по выборкам. Именно

$\tilde{\Theta}_1$– значение этого параметра по первой выборке,

$\tilde{\Theta}_2$ - значение этого параметра по второй выборке,

Таким образом Θ- случайная величина, а $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2, \tilde{\Theta}_3, \dots, \tilde{\Theta}_n$-ее частные значения. Об оценке Θ, как для любой случайной величины можно говорить о ее числовых характеристиках (мат. ожидании, дисперсии и сред. квад. отклон.).

Естественно, что М(Θ) ≈ Θ (с избытком или с недостатком).Здесь М(Θ)- точечная оценка параметра Θ генеральной совокупности.

Точечные оценки бывают:

1) Смещенные, если М(Θ) ≠ Θ;

2) Несмещенные, если М(Θ) = Θ;

3) Несмещенная оценка является эффективной, если она при большом пимеет наименьшую дисперсию.

4) Несмещенная оценка является состоятельной, если при $n\to\infty$, ее дисперсия→0.

Можно доказать, что:

1) m_x = x, т.е. x – есть не смещенная оценка математического ожидания генеральной совокупности;

2) $\sigma^2 \neq S^2$, т.е. S^2 - есть смещенная оценка σ^2 генеральной дисперсии. Дело в том, что выборочная дисперсия (особенно если n – велико) имеет тенденцию опаздывать. Что бы устранить опаздывание вводят поправку, умножая S^2 на n / n-1.

Интервальные оценки. Доверительный интервал.

Интервальные оценки задаются двумя числами – концами интервала. Пусть в общем виде для параметра генеральной совокупности θнайдем параметр выборочной совокупности $\tilde{\theta}$. Тогда будем $|\Theta - \bar{\Theta}|$– величина ошибки. Желательно, чтобы она была мала, т. е. чтобы было справедливо неравенство $|\Theta - \bar{\Theta}| < \delta$, где δ – мало, и чем оно меньше, точнее замена θ на $\tilde{\theta}$.

Попробуем, чтобы это неравенство выполнялось с большей вероятностью γ. Например γ= 0,95. Очевидно, наше требование к малой величине ошибки можно записать так Р ($|\Theta - \bar{\Theta}| < \delta$) = γ или так Р ($\tilde{\theta} - \delta < \theta < \tilde{\theta} + \delta$) = γ

Это равенство означает, что с вероятностью γ интересующий нас параметр θ попадает в интервал $\tilde{\theta} - \delta < \theta < \tilde{\theta} + \delta$

Этот интервал называется доверительным, так как γ называют доверительной вероятностью, т.е. надежностью.

Определение. Доверительный интервал некоторого параметра θ– это есть интервал, который покрывает данный параметр θ с заданной надежностью γ.

Доверительные интервалы для числовых характеристик нормальной генеральной совокупности.

1) Построение доверительного интервала для математического ожидания mx нормальной генеральной совокупности зависит от того, известна или неизвестна дисперсия σ^2 имеет вид:

а) При известной дисперсии σ^2 имеет вид x - t_γ *σ / $\sqrt{n}$< m_x < x + t_γ *σ / $\sqrt{n}$

где t_γ определяется из равенства Ф (t_γ) = $\gamma/2$ по таблице функции Лапласа

(приложения 2) при заданной надежности γ, а t_γ *σ / $\sqrt{n}$ = δ – точность оценки.

б) При неизвестной дисперсии σ^2 будет x - $t(\gamma, n)$ *S / $\sqrt{n-1}$< m_x < x + $S(\gamma, n)$ *σ / $\sqrt{n-1}$, где $t(\gamma, n)$ определяется по таблице распределения Стьюдента

21.5. Зависимые и независимые случайные величины.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

Определение. Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин: $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$

Для непрерывных случайных величин: $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dxdy$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.

Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

Определение. Коэффициентом корреляции $\boldsymbol{r_{xy}}$ случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин. $r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

Свойство: Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$\left|\mu_{xy}\right| \le \sqrt{D_x D_y}$$

Свойство: Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$\left|r_{xy}\right| \le 1$$

Случайные величины называются коррелированными, если их корреляционный момент отличен от нуля, и некоррелированными, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

21.6 Линейная регрессия

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины.

Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная.

$$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$$

Для определения этой функции остается только найти постоянные величины α и β.

Определение. Функция *g(X)* называется наилучшим приближением случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция *g(x)* называется среднеквадратической регрессией Y на X.

Теорема. Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле:

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$$

в этой формуле $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ – коэффициент корреляции величин *X* и *Y*.

Величина $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется коэффициентом регрессии *Y* на *X*.

Прямая, уравнение которой

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

называется прямой сренеквадратической регрессии *Y* на *X*.

Величина $\sigma_y^2(1 - r^2)$ называется остаточной дисперсией случайной величины *Y* относительно случайной величины *X*. Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины *Y* линейной функцией $g(X)=\alpha X + \beta$.

Видно, что если $r=\pm1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина *Y* точно представляется линейной функцией от случайной величины *X*.

Прямая среднеквадратичной регрессии *X* на *Y* определяется аналогично по формуле:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$$

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке (m_x, m_y), которую называют центром совместного распределения случайных величин *X* и *Y*.

21.7 Линейная корреляция.

Если две случайные величины *X* и *Y* имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины *X* и *Y* связаны линейной корреляционной зависимостью.

Теорема. Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

Вопросы для самоконтроля

1. Генеральная и выборочная совокупность. Выборочный метод. Повторная, бесповторная, репрезентативная выборки
2. Статистический и вариационный ряды. Варианты, частоты, относительные частоты
3. Статистическое распределение выборки. Полигон.
4. Эмпирическая функция распределения $F^{*}(x)$. Её свойства
5. группированное статистическое распределение. Построение гистограммы
6. Числовые характеристики выборки
7. Точечные оценки числовых характеристик и их свойства
8. Точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения генеральной совокупности
9. Интервальные оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал
10. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности
11. Функциональная и корреляционная зависимости между случайными величинами
12. Основные задачи теории корреляции
13. Коэффициент корреляции и его свойства.
14. Линейная корреляция. Определение параметров прямой регрессии методом квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бирюкова, Л. Г.** Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Матвеев, Р. В. Сагитов, Е. В. Швед., - 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899 – Загл. с экрана.
2. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60х90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.
3. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.
4. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

Дополнительная

1. **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.
2. **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.
3. **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. -

299 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011748-5. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521 – Загл. с экрана.

4. **Сапожников, П. Н.** Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=548242 – Загл. с экрана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Бирюкова, Л. Г.** Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Матвеев, Р. В. Сагитов, Е. В. Швед., - 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899 – Загл. с экрана.

2. **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. — Электрон. текстовые данные. — М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011748-5. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521 – Загл. с экрана.

3. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра в примерах и задачах. Практикум: компьютерное моделирование. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010586-4 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895 – Загл. с экрана.

4. **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010206-1, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=476097 – Загл. с экрана.

5. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Типовой расчёт 3. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 24 с.

6. **Демина, Т. И.** Математический анализ для экономистов: практикум. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т. И. Демина, О. П. Шевякова. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 365 с.: 60x90 1/16. – Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010388-4, 500 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418 – Загл. с экрана.

7. Интегральное исчисление функции одной переменной. Типовой расчет №4. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

8. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 1. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-10-2. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520540 – Загл. с экрана.

9. **Кальней, С. Г.** Математика. Том 2. [Электронный ресурс]: учебник / С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. А. Прокофьев. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 360 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат), 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520538 – Загл. с экрана.

10. **Кундышева, Е. С.** Математика. [Электронный ресурс]: учебник / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6. - Режим доступа: Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127 – Загл. с экрана.

11. Математика. Сборник задач. Часть 1. Модули 1, 2, 3. Составители: Корсунов В. П. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008

12. Производная и дифференциал Задачник по высшей математике для студентов с\х специальностей. Составители: Т. С. Хучраева,Т. В. Кириллова, Н. А. Цолан. ФГОУ ВПО «СГАУ» - Саратов 2008 – 40 с.

13. **Сапожников, П. Н.** Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. — Электрон. текстовые данные. — М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=548242 – Загл. с экрана.

14. **Шипачев, В. С.** Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006. - 304 с.

15. **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с.

16. **Шипачев, В. С.**Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Шипачев. - 3-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9, 800 экз. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469727 – Загл. с экрана.

17. **Хучраева, Т. С.** Высшая математика : учебное пособие / Т. С. Хучраева, А. А. Смоленинов, Т. В. Кириллова. - Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2008. - 156 с.

18. Элементы линейной алгебры. Типовой расчёт 1Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с.

19. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Типовой расчёт 2. Методические указания и задания по курсу Математика для экономических специальностей. Составители: Н. А. Цолан, Т. С. Хучраева, Т. В. Кириллова. ФГОУ ВПО «СГАУ» Саратов 2008 – 20 с

СОДЕРЖАНИЕ